Exercise Sheet 10

due Jan 12th 2012

Exercise 37 (3 pts.). Use the geodesic equation $\ddot{\gamma}^k + \sum_{i,j} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \Gamma_{ij}^k = 0$ and the stereographic projection from Exercise 17 to show that geodesics on the round sphere minus a point are contained in great circles.

Hint. Show that it suffices to find *one* geodesic $\gamma(t) = (\alpha(t), 0)$ with a monotonously increasing function $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$, $\alpha(0) = 0$.

Exercise 38 (3 pts.). Parametrise the catenoid and the helicoid in geodesic parallel coordinates.

Exercise 39 (6 pts.). Consider an arclength-parametrised curve $c = (r, 0, h)$ and its surface of revolution

$$f(t, \varphi) = \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi \\ r(t)\sin\varphi \\ h(t) \end{pmatrix}$$

as in Exercise 18. Show that all those curves that produce a surface of constant Gaussian curvature $K \geq 0$ fulfill $r'' + rK = 0$ and thus are of the form

$$r(t) = a\cos(\sqrt{K}t) + b\sin(\sqrt{K}t) \qquad \text{with constants } a, b \in \mathbb{R}, \text{ if } K > 0,$$
$$r(t) = at + b \qquad \text{with constants } a, b \in \mathbb{R},\ |a| < 1, \text{ if } K = 0$$

and h such that $h'^2 + r'^2 = 1$. These surfaces are in case $K = 0$ classified as cylinder, plane or cone and in case $K > 0$ as **elongated sphere** ($a^2K < 1$), **round sphere** ($a^2K = 1$) or **oblate sphere** ($a^2K > 1$). Specify the domain for c and sketch the corresponding surfaces in each case of $K > 0$.

Exercise 40 (4 pts.). Let f be a surface of revolution as in Exercise 39 and denote an arc-length parametrised curve with constant z-coordinate $h(t)$ on f by γ_t. Show that γ_t is a geodesic if and only if $r'(t) = 0$.

Consider additionally some geodesic $\gamma(s) = f(a(s), b(s))$ on f with tangent vector at $\gamma(s)$ equal to $a'(s)\frac{\partial f}{\partial t} + b'(s)\frac{\partial f}{\partial \varphi}$. If γ and γ_t intersect in $\gamma(s)$ then denote the angle between γ and γ_t by ϑ_s and assume $0 \leq \vartheta_s \leq \frac{\pi}{2}$. Show that $r^2(a(s))a'(s)$ is a constant function and that $\cos\vartheta_s = |r(a(s))a'(s)|$. Conclude that $r(a(s))\cos\vartheta_s$ is a constant function.

Übungsblatt 10

Abgabe: 12. Januar 2012

Aufgabe 37 (3 Pkte.)**.** Zeigen Sie mithilde der Geodätischen-Gleichung $\ddot{\gamma}^k + \sum_{i,j} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \Gamma^k_{ij} = 0$ und der stereographischen Projektion aus Aufgabe 17, daß Geodätische auf der runden Sphäre minus einem Punkt in Großkreisen verlaufen.

Tip. Zeigen Sie, daß es genügt, *eine* Geodätische $\gamma(t) = (\alpha(t), 0)$ für ein monoton wachsendes $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$, $\alpha(0) = 0$, zu finden.

Aufgabe 38 (3 Pkte.)**.** Parametrisieren Sie das Katenoid und das Helikoid in geodätischen Parallelkoordinaten.

Aufgabe 39 (6 Pkte.)**.** Betrachten Sie die nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c = (r, 0, h)$ und ihre Drehfläche

$$f(t, \varphi) = \begin{pmatrix} r(t) \cos \varphi \\ r(t) \sin \varphi \\ h(t) \end{pmatrix}$$

aus Aufgabe 18. Zeigen Sie, daß alle solche Kurven, die eine Drehfläche konstanter Gauß-Krümmung $K \geq 0$ ergeben, $r'' + rK = 0$ erfüllen und daher von der Form

$$r(t) = a \cos(\sqrt{K} t) + b \sin(\sqrt{K} t) \qquad \text{mit Konstanten } a, b \in \mathbb{R} \text{ für } K > 0,$$
$$r(t) = at + b \qquad \text{mit Konstanten } a, b \in \mathbb{R},\ |a| < 1 \text{ für } K = 0$$

und solchem h, daß $h'^2 + r'^2 = 1$ ist, sein müssen. Diese Flächen sind für $K = 0$ klassifizierbar als Zylinder, Ebene oder Kegel bzw. für $K > 0$ als **Spindel** ($a^2 K < 1$), **(runde) Sphäre** ($a^2 K = 1$) oder **Wulst** ($a^2 K > 1$). Geben Sie für die Fälle $K > 0$ den jeweiligen Definitionbereich von c an und skizzieren Sie die Flächentypen.

Aufgabe 40 (4 Pkte.)**.** Sei f eine Drehfläche wie in Aufgabe 39 und γ_t die nach Bogenlänge parametrisierte Kurve auf f mit konstanter z-Koordinate $h(t)$. Zeigen Sie, daß γ_t genau dann Geodätische ist, wenn $r'(t) = 0$ ist.

Betrachten Sie nun eine Geodätische $\gamma(s) = f(a(s), b(s))$ auf f mit Tangentialvektor $a'(s) \frac{\partial f}{\partial t} + b'(s) \frac{\partial f}{\partial \varphi}$ in $\gamma(s)$. Wenn sich γ und γ_t in $\gamma(s)$ schneiden, so bezeichnen wir den Schnittwinkel zwischen ihnen mit ϑ_s. Nehmen wir $0 \leq \vartheta_s \leq \frac{\pi}{2}$ an. Zeigen Sie nun, daß $r^2(a(s)) a'(s)$ eine konstante Funktion ist und $\cos \vartheta_s = |r(a(s)) a'(s)|$. Folgern Sie, daß $r(a(s)) \cos \vartheta_s$ ebenfalls eine konstante Funktion ist.