(Christmas) Exercise Sheet 9

due Jan 5th 2012

Exercise 33a (3 pts.)**.** For $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ open, let $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ be a regular surface patch and $\gamma : I \to \Omega$ be a curve such that $\bar{\gamma} := f \circ \gamma$ is arclength-parametrised. Show: *(i)* $\bar{\gamma}$ is a straight line if and only if is is both an asymptotic line and a geodesic. *(ii)* If $\bar{\gamma}$ is a curvature line and a geodesic, then $\bar{\gamma}$ is planar. Does the converse hold?

Exercise 33b (3 pts.)**.** Let X be a vector field along a geodesic $\bar{\gamma}$. Show that X is parallel along $\bar{\gamma}$ if and only if it has constant length and makes a constant angle with $\dot{\bar{\gamma}}$.

Exercise 34 (4 pts.)**.** Let $f : \Omega \to M$, $M \subset \mathbb{R}^3$, be a regular surface.

(i) Show that if f is both a curvature line parametrisation and and arclength parametrisation along every coordinate direction, the surface has to be isometric to the plane.

(ii) Part *(i)* shows that f cannot always be chosen such that f_u, f_v become an orthonormal basis of T_pM. But: Show that around every point $p \in \Omega$, one can find a small neighbourhood Ω' and an **orthonormal frame** X, Y, that means: vectorfields $X, Y \in \mathfrak{X}T\Omega'$ such that X_q, Y_q is a g-orthonormal basis of $T_q\Omega$ for every $q \in \Omega'$.

Hint: Show that Gram-Schmid orthonormalisation of f_u, f_v depends smoothly on the base point.

Exercise 35 (6 pts.)**.** This exercise is intended to show that the covariant derivative is uniquely determined by some properties like the ones given in the lecture.

Let ∇ be the covariant derivative of a regular surface $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$, defined as the tangential part of the cartesian derivative. Assume that $\tilde{\nabla}$ is another operator $\mathfrak{X}T\Omega \times \mathfrak{X}T\Omega \to \mathfrak{X}T\Omega$, such that $\tilde{\nabla}_X Y$ is tensorial in X and a derivation in Y, that means

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\varphi X_1 + \psi X_2} Y &= \varphi \tilde{\nabla}_{X_1} Y + \psi \tilde{\nabla}_{X_2} Y, \\ \tilde{\nabla}_X (Y_1 + Y_2) &= \tilde{\nabla}_X Y_1 + \tilde{\nabla}_X Y_2, \\ \tilde{\nabla}_X (\varphi Y) &= \varphi \tilde{\nabla}_X Y + (D_X \varphi) Y \qquad \textbf{(Leibniz' rule)} \end{aligned}$$

pointwise for all vectorfields $X, Y, \ldots \in \mathfrak{X}T\Omega$ and $\varphi, \psi \in C^\infty(\Omega)$. Show that $\nabla_X Y - \tilde{\nabla}_X Y$ is tensorial both in X and Y. Show that $\tilde{\nabla} = \nabla$ if, in addition,

$$\begin{aligned} D_X \langle Y_1, Y_2 \rangle &= \langle \tilde{\nabla}_X Y_1, Y_2 \rangle + \langle Y_1, \tilde{\nabla}_X Y_2 \rangle, \\ \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X &= \nabla_X Y - \nabla_Y X. \end{aligned}$$

Exercise 36 (n bonus pts.)**.** Enjoy your christmas holidays. Write a short differential-geometry centered essay on wrapping presents and conduct some practical experiments.

(Weihnachts-)Übungsblatt 9

Abgabe: 5. Januar 2012

Aufgabe 33a (3 Pkte.)**.** Für offenes $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ein reguläres Flächenstück und $\gamma : I \to \Omega$ und Kurve, so daß $\bar{\gamma} := f \circ \gamma$ nach Bogenlänge parametrisiert ist. Zeigen Sie: *(i)* $\bar{\gamma}$ ist genau dann ein Geradenstück, wenn sie gleichzeitig Asymptotenlinie und Geodätische ist. *(ii)* Wenn $\bar{\gamma}$ eine Krümmungslinie und Geodätische ist, dann ist $\bar{\gamma}$ schon planar. Gilt die Umkehrung auch?

Aufgabe 33b (3 Pkte.)**.** Sei X ein Vektorfeld entlang einer Geodätischen $\bar{\gamma}$. Zeigen Sie, daß X genau dann parallel entlang $\bar{\gamma}$ ist, wenn es konstante Länge hat und mit $\dot{\bar{\gamma}}$ überall den gleichen Winkel einschließt.

Aufgabe 34 (4 Pkte.)**.** Sei $f : \Omega \to M$, $M \subset \mathbb{R}^3$, eine reguläre Fläche.

(i) Zeigen Sie, daß die Fläche isometrisch zur Ebene ist, wenn f sowohl eine Krümmungslinienparametrisierung als auch in jeder Koordinatenrichtung bogenlängenparametrisiert ist.

(ii) Teil *(i)* zeigt, daß f im allgemeinen nicht so gewählt werden kann, daß f_u, f_v eine Orthonormalbasis von T_pM wird. Aber: Zeigen Sie, daß man um jeden Punkt $p \in \Omega$ eine kleine Umgebung Ω' und einen **orthonormalen Rahmen** X, Y finden kann, das bedeutet Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}T\Omega'$, so daß X_q, Y_q eine g-orthonormale Basis von $T_q\Omega$ in jedem $q \in \Omega'$ bilden.

Tip: Zeigen Sie, daß die Gram-Schmid-Orthonormalisierung von f_u, f_v glatt vom Basispunkt abhängt.

Aufgabe 35 (6 Pkte.)**.** In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, daß die kovariante Ableitung eindeutig durch Eigenschaften, wie sie in der Vorlesung gegeben wurden, bestimmt ist.

Sei ∇ die kovariante Ableitung zu einer Fläche $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$, definiert als der tangentiale Anteil der kartesischen Ableitung. Angenommen, $\tilde{\nabla}$ ist ein zweiter Operator $\mathfrak{X}T\Omega \times \mathfrak{X}T\Omega \to \mathfrak{X}T\Omega$, so daß $\tilde{\nabla}_X Y$ tensoriell X und eine Derivation in Y ist, das heißt

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{\varphi X_1 + \psi X_2} Y &= \varphi \tilde{\nabla}_{X_1} Y + \psi \tilde{\nabla}_{X_2} Y,\\ \tilde{\nabla}_X (Y_1 + Y_2) &= \tilde{\nabla}_X Y_1 + \tilde{\nabla}_X Y_2,\\ \tilde{\nabla}_X (\varphi Y) &= \varphi \tilde{\nabla}_X Y + (D_X \varphi) Y \qquad \textbf{(Leibniz-Regel)}\end{aligned}$$

punktweise für alle Vektorfelder $X, Y, \ldots \in \mathfrak{X}T\Omega$ und $\varphi, \psi \in C^\infty(\Omega)$. Zeigen Sie, daß $\nabla_X Y - \tilde{\nabla}_X Y$ tensoriell sowohl in X als auch in Y ist. Zeigen Sie, daß $\tilde{\nabla} = \nabla$ ist, sobald zusätzlich gilt:

$$\begin{aligned}D_X \langle Y_1, Y_2 \rangle &= \langle \tilde{\nabla}_X Y_1, Y_2 \rangle + \langle Y_1, \tilde{\nabla}_X Y_2 \rangle,\\ \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X &= \nabla_X Y - \nabla_Y X.\end{aligned}$$

Aufgabe 36 (n Zusatzpunkte.)**.** Haben Sie schöne Weihnachtsferien. Verfassen Sie nach Lust und Laune ein paar differentialgeometrische Zeilen über das Geschenk-Einpacken und führen Sie praktische Experimente dazu durch.