Exercise Sheet 7

due Dec 6th 2011

Exercise 25 (3 pts.). Let $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a regular parametrized surface element and denote its Gauss map by ν , its first fundamental form by g and its second fundamental form by b . For every point $p \in \Omega$, the **third fundamental form** is the symmetric bilinear form e defined by $(X, Y) \mapsto \langle D\nu|_p(X), D\nu|_p(Y) \rangle_{\mathbb{R}^3}$ for all $X, Y \in T_p\Omega$.

(i) Prove that $e(X, Y) - 2Hb(X, Y) + Kg(X, Y) = 0$ holds for all $X, Y \in T_p\Omega$.

(Use a basis of $T_p\Omega$ of vectors that point into the principal directions.)

(ii) Show that the Gauss map ν is conformally equivalent to f if f parametrizes a minimal surface with $K \neq 0$ everywhere.

(Two regular parametrized surface patches $f, \tilde{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ are called **conformally equivalent** if their first fundamental forms are positive multiples of each other, that is, if there is a function $\lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ such that $g = \lambda \cdot \tilde{g}$.)

Exercise 26 (3 pts.). Consider a parametrized surface with negative Gaussian curvature. Show that this surface is a minimal surface if and only if the asymptotic lines at each point are perpendicular.

Exercise 27 (6 pts.). The associated family of a minimal surface $(F(z), G(z))$ in Weierstraß representation is $(e^{it}F(z), G(z))$ with $t \in [0, 2\pi]$.

(i) Prove that $(e^{it}F(z), G(z))$ is a minimal surface for all t .

(ii) Prove that $(e^{is}F(z), G(z))$ and $(e^{it}F(z), G(z))$ are isometric surfaces for $s, t \in [0, 2\pi]$.

(iii) Prove that the Gauss map of $(e^{it}F(z), G(z))$ is independent of t .

(iv) Prove that the principal curvatures of $(e^{it}F(z), G(z))$ are independent of t .

(v) Describe how the principal curvature directions of $(F(z), G(z))$ relate to those of $(e^{it}F(z), G(z))$.

Exercise 28 (4 pts.). Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be open and $a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmonic. Show (by contradiction) the **maximum principle**: If a has a local maximum or minimum inside Ω , it has to be locally constant.

Moreover, prove that there are no compact minimal surfaces. In other words, no minimal surface is bounded and closed with respect to the euclidean topology on $\mathbb{R}^3$.

Übungsblatt 7

Abgabe: 6. Dezember 2011

Aufgabe 25 (3 Pkte.). Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine reguläres parametrisiertes Flächenstück, ν die Gauß-Abbildung, g die erste und b die zweite Fundamentalform dieser Fläche. Für jeden Punkt $p \in \Omega$ sei e die symmetrische Bilinearform $(X, Y) \mapsto \langle D\nu(X), D\nu(Y) \rangle_{\mathbb{R}^3}$ für alle $X, Y \in T_p\Omega$. Sie heißt **dritte Fundamentalform** von f .

(i) Zeigen Sie, daß $e(X, Y) - 2Hb(X, Y) + Kg(X, Y) = 0$ für alle $X, Y \in T_p\Omega$.

(Benutzen Sie eine Basis von $T_p\Omega$, die in Richtung der Hauptkrümmungsrichtungen zeigt.)

(ii) Zeigen Sie, daß ν konform äquivalent zu f ist, wenn f eine Minimalfläche parametrisiert, auf der überall $K \neq 0$ ist.

(Zwei reguläre parametrische Flächenstücke $f, \tilde{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißen **konform äquivalent**, wenn ihre ersten Fundamentalformen positive Vielfache voneinander sind, d. h. wenn es eine Funktion $\lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit $g = \lambda \cdot \tilde{g}$ gibt.)

Aufgabe 26 (3 Pkte.). Zeigen Sie, daß eine parametrisierte Fläche negativer Gaußkrümmung genau dann eine Minimalfläche ist, wenn die Asymptotenlinien an jedem Punkt senkrecht aufeinander stehen.

Aufgabe 27 (6 Pkte.). Die zu einer Minimalfläche $(F(z), G(z))$ assoziierte Familie ist in Weierstraß-Darstellung $(e^{it}F(z), G(z))$ mit $t \in [0, 2\pi]$.

(i) Zeigen Sie, daß $(e^{it}F(z), G(z))$ eine Minimalfläche ist für alle t .

(ii) Zeigen Sie, daß $(e^{is}F(z), G(z))$ und $(e^{it}F(z), G(z))$ isometrisch sind für alle $s, t \in [0, 2\pi]$.

(iii) Zeigen Sie, daß die Gauß-Abbildung von $(e^{it}F(z), G(z))$ unabhängig von t ist.

(iv) Zeigen Sie, daß die Hauptkrümmungen von $(e^{it}F(z), G(z))$ unabhängig von t sind.

(v) Beschreiben Sie das Verhältnis der Hauptkrümmungsrichtungen von $(F(z), G(z))$ und $(e^{it}F(z), G(z))$.

Aufgabe 28 (4 Pkte.). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und $a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch. Zeigen Sie (durch Widerspruch) das **Maximumprinzip**: Hat a ein lokales Maximum oder Minimum im Inneren von Ω , muß es schon lokal konstant sein.

Zeigen Sie damit (oder sonstwie), daß es keine kompakten (also beschränkten und bezüglich $\mathbb{R}^3$ abgeschlossenen) Minimalflächen gibt.