

Exercise Sheet 2

due Nov 1st 2011

Exercise 5 (2 pts.). Let γ be a regular curve in $\mathbb{R}^n$ and $\gamma(t)$ any point with $\ddot{\gamma} \neq 0$. Give the constant-speed parametrisation s of a circle with

$$s(0) = \gamma(t), \quad \dot{s}(0) = \dot{\gamma}(t), \quad \ddot{s}(0) = \ddot{\gamma}(t),$$

which is called the **osculating circle** of γ in $\gamma(t)$. Give a description of the radius and center of this circle in terms of κ and n .

Exercise 6 (3 pts.). Let $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ be continuously differentiable and $\gamma : t \mapsto (t, f(t))$ a parametrisation of its graph. Give a formula for its curvature in terms of f .

A first comparison theorem: Let f_1 and f_2 be two such functions with

$$f_1(0) = f_2(0), \quad f_1'(0) = f_2'(0), \quad \kappa_1(0) > \kappa_2(0).$$

Show that in a small neighbourhood of 0, it holds $f_1(t) > f_2(t)$.

Exercise 7 (5 pts.). Recall the situation of exercise 4: $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ smooth, $u(p) = 0$ and $\nabla u(p) \neq 0$. Let $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ be an arclength parametrisation of the level set $\{q \in U \mid u(q) = 0\}$ in a small neighbourhood U of p . Recall that $\nabla u / \|\nabla u\|$ is normal to γ and thus equals $n = J\dot{\gamma}$ (up to an orientation reversal of γ).

- (i) Let $P := \mathbb{1} - n \otimes n$ be the orthogonal projection to $n^\perp$, meaning $Px = x - (x^T n)n$. Compute that

$$Dn = \frac{1}{\|\nabla u\|} PD^2 u.$$

- (ii) Show that at a point $p = \gamma(t)$ on the curve, Dn has eigenvalues 0 and $\pm\kappa(t)$, corresponding to eigenvectors n and Jn .

Exercise 8 (6 pts.). Let $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ be an arclength-parametrised curve and $s \in \mathbb{R}$ fixed. The **parallel curve** to γ with (signed) distance s is

$$\gamma_s : t \mapsto \gamma(t) + s n(t).$$

- (i) For which $s \in I$ is this parallel curve regular? Interpret your statement geometrically.
- (ii) Compute $L(\gamma_s)$. Show that for simply closed γ , the **tubular neighbourhood**

$$\mathbb{B}_\varepsilon(\gamma) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \text{dist}(x, \gamma) < \varepsilon\}$$

has volume $2\varepsilon L(\gamma)$ for small ε .

Übungsblatt 2

Abgabe 1. November 2011

Aufgabe 5 (2 Pkte.). Sei γ eine reguläre Kurve in $\mathbb{R}^n$ und $\gamma(t)$ ein beliebiger Punkt $\ddot{\gamma} \neq 0$. Geben Sie eine zur Bogenlänge proportionale (also $\|\dot{s}\| = \text{const.}$) Parametrisierung s eines Kreises mit

$$s(0) = \gamma(t), \quad \dot{s}(0) = \dot{\gamma}(t), \quad \ddot{s}(0) = \ddot{\gamma}(t),$$

des **Schmiegekreises** von γ in $\gamma(t)$. Schreiben Sie Radius und Mittelpunkt mithilfe von κ und n .

Aufgabe 6 (3 Pkte.). Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\gamma : t \mapsto (t, f(t))$ eine Parametrisierung des Graphen von f . Drücken Sie ihre Krümmung mithilfe von f und seinen Ableitungen aus.

Ein erster Vergleichssatz: Seien f_1 und f_2 zwei solche Funktionen und

$$f_1(0) = f_2(0), \quad f_1'(0) = f_2'(0), \quad \kappa_1(0) > \kappa_2(0).$$

Zeigen Sie $f_1(t) > f_2(t)$ in einer Umgebung von 0.

Aufgabe 7 (5 Pkte.). Erinnern Sie sich an die Situation aus Aufgabe 4: $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ glatt, $u(p) = 0$ und $\nabla u(p) \neq 0$. Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Bogenlängenparametrisierung der Niveaumenge $\{q \in U \mid u(q) = 0\}$ in einer kleinen Umgebung U of p . Machen Sie sich klar, daß $\nabla u / \|\nabla u\|$ normal zu γ und also $n = J\dot{\gamma}$ (bis auf möglichen Orientierungswechsel von γ) ist.

- (i) Sei $P := \mathbb{1} - n \otimes n$ die Orthogonalprojektion auf $n^\perp$, das heißt $Px = x - (x^T n)n$. Zeigen Sie

$$Dn = \frac{1}{\|\nabla u\|} PD^2 u.$$

- (ii) Sei $p = \gamma(t)$ ein Punkt auf der Kurve. Zeigen Sie, daß Dn dort Eigenwerte 0 and $\pm \kappa(t)$ hat, die zu den Eigenvektoren n and Jn gehören.

Aufgabe 8 (6 Pkte.). Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und $s \in \mathbb{R}$ fest. Die **Parallelkurve** zu γ mit (vorzeichenbehafteter) Distanz s ist

$$\gamma_s : t \mapsto \gamma(t) + s n(t).$$

- (i) Für welche $s \in I$ ist diese Parallelkurve regulär? Interpretieren Sie ihre Aussage geometrisch.
- (ii) Berechnen Sie $L(\gamma_s)$. Zeigen Sie, daß für einfach geschlossenes γ die **tubulare Umgebung**

$$\mathbb{B}_\varepsilon(\gamma) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \text{dist}(x, \gamma) < \varepsilon\}$$

den Flächeninhalt $2\varepsilon L(\gamma)$ für kleines ε besitzt.