Probeklausur

Ausgabe: 28. Juni 2012
Rückgabe zur Korrektur: 5. Juli 2012

Wichtiger Hinweis: Beginnen Sie jede Aufgabe damit, klar zu formulieren, was zu zeigen ist. Dieser Schritt wird bewertet!

Aufgabe 1. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

(i) Geben Sie die definierenden Eigenschaften des Levi-Cività-Zusammenhangs an.

(ii) Zeigen Sie $[X, Y] = 0$ für alle Koordinatenvektorfelder.

(iii) Geben Sie die Definition der Exponentialabbildung um $p \in M$ an. Weisen Sie nach, daß Ihre Exponentialabbildung auf einem kleinen Ball $\mathbb{B}_\varepsilon(0) \subset T_pM$ wohldefiniert ist.

Aufgabe 2. Sei $\mathfrak{u}(n, \mathbb{C})$ die Lie-Algebra zur unitären Gruppe $U(n, \mathbb{C}) = \{A \mid A\bar{A}^T = Id\}$. Zeigen Sie, daß $\mathfrak{u}(n, \mathbb{C})$ gleich (genauer: isomorph zu) der Menge der hermiteschen, also komplex-konjugiert schiefsymmetrischen Matrizen über $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 3. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und γ_s, $s \in [0; 1]$, eine glatte Variation von Geodätischen. Zeigen Sie: $\frac{\partial}{\partial s}\gamma_s$ ist ein Jacobifeld entlang jedes γ_s.

Aufgabe 4a. Definieren Sie die durch das Schläfli-Symbol $\{p, q\}$ beschriebene Mannigfaltigkeit. Welche Metriken konstanter Krümmung gibt es auf $\{5, 3\}$ bzw. $\{4, 3\}$ (mit Begründung)?

Aufgabe 4b. Geben Sie die Pflasterungen von $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{H}^2$ bzw. $\mathbb{H}^3$ an und weisen Sie nach, daß Ihre Aufzählung erschöpfend ist.

Aufgabe 5. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Gibt es Vektorfelder, die Jacobifeld entlang *jeder* Geodätischen sind?