Übungsblatt 10

Abgabe: 28. Juni 2012

Aufgabe 10.1. Leiten Sie die Anzahl von k-Zellen, $0 \leq k \leq 3$, des abgestumpften 120-Zell (»Biggie«) her.

Aufgabe 10.2a. Auf $\mathbb{R}^4$ mit der kanonischen Basis $1, i, j, k$ definieren wir eine bilineare, schiefsymmetrische Multiplikation durch $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ sowie $ik = k$, $jk = i$ und $ki = j$. $\mathbb{R}^4$ mit dieser Verknüpfung nennt man **Hamilton'sche Quaternionen** $\mathbb{Q}$, Elemente der $\mathbb{S}^3$ **Einheitsquaternionen**. Der **Imaginärteil** von $x = a + bi + cj + dk$ sei $bi + cj + dk$, das **konjugierte** Element zu x sei $\bar{x} := a - bi - cj - dk$.

(i) Zeigen Sie $x\bar{x} = |x|^2$ für die euklidische Norm.

(ii) Schließen Sie, daß die Quaternionen eine Lie-Gruppe bilden (Tip: Zeigen Sie, daß ein Inverses, wenn es existiert, eindeutig ist) und die $\mathbb{S}^3$ eine Lie-Untergruppe.

Aufgabe 10.2b. $\mathbb{R}^3$ ist als Menge der rein imaginären Quaternionen $I\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}$ eingebettet.

(i) Zeigen Sie, daß $pxp^{-1} \in I\mathbb{Q}$ für alle $x \in I\mathbb{Q}$, $p \in \mathbb{S}^3$. Schließen Sie, daß $T[q] : x \mapsto pxp^{-1}$ für jedes $p \in \mathbb{S}^3$ eine Isometrie des $I\mathbb{Q}$ ist und $T : q \mapsto T[q]$ ein Gruppenhomomorphismus $\mathbb{S}^3 \to SO(3, \mathbb{R})$.

(ii) Zeigen Sie $T[q] = T[p] \Leftrightarrow p = \pm q$ und daß T surjektiv ist.

(iii) Schließen Sie, daß T eine zweiblättrige Überlagerung $\mathbb{S}^3 \to SO(3, \mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 10.3. Sei G eine Lie-Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$ und $A \in G$. Zeigen Sie, daß der Tangentialraum dort $T_A G = A \cdot T_{\mathrm{id}} G$ ist.

Aufgabe 10.4. Seien $X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

(i) Zeigen Sie, daß für die einparametrige Untergruppe zu $X \in GL(n, \mathbb{R})$ gilt: $\alpha^X(t) = \exp(tX) := \mathrm{id} + \sum (tX)^k / k!$ Warum konvergiert die Reihe?

(ii) Zeigen Sie $\exp(X + Y) = \exp(X) \exp(Y)$ für kommutierende X, Y. Geben Sie ein Beispiel für $\exp(X + Y) \neq \exp(X) \exp(Y)$.

(iii) Zeigen Sie mithilfe der Jordan'schen Normalform $\det \exp(X) = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} X}$.

(iv) Sei $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ die Lie-Algebra zur speziellen orthogonalen Gruppe $SO(n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, daß $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ gleich der Menge der schiefsymmetrischen Matrizen ist (genau genommen: isomorph zu ihr).

Tip: Das wußten Sie schon vor einem Jahr, Ihnen fehlten bloß die Begriffe – werfen Sie einen Blick auf Übungsblatt 1 der Differentialgeometrie I.