Übungsblatt 9

Abgabe: 21. Juni 2012

Aufgabe 9.1. Bestimmen Sie die regulären Pflasterungen der $\mathbb{S}^3$.

Aufgabe 9.2. Sei M eine dreidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit konstanter Schnittkrümmung C, also $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{H}^3$ oder eine skalierte Version davon. Zeigen Sie, daß je drei Punkte $p, q, r \in M$, die nicht auf einer gemeinsamen Geodätischen liegen, eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit $T \subset M$ gleicher Schnittkrümmung C bestimmen. Das bedeutet, daß die Seitenflächen von Tetraedern beispielsweise in $\mathbb{H}^3$ wieder hyperbolische Dreiecke sind.

Tip. Betrachten Sie die drei Standardräume getrennt und betrachten Sie geeignete euklidische (Hyper-)Ebenen durch p, q und r. Im hyperbolischen Falle benutzen Sie das Poincaré-Ballmodell und legen Sie p in den Ursprung.

Aufgabe 9.3. In der Vorlesung haben Sie die regulären Pflasterungen von $\mathbb{H}^3$ aufgezählt, indem Sie überlegt haben, wie viele platonische Körper an einer Kante zusammentreffen können, wenn der platonische Körper vergrößert oder verkleinert wird. Warum genügt es, diese Überlegung für die platonischen Körper durchzuführen?

Aufgabe 9.4. Die einzige fixpunktfreie, eigentlich diskontinuierliche Untergruppe der Diffeomorphismen $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ ist $\{\pm \mathrm{id}\}$. Deswegen gibt es außer $\mathbb{S}^2$ und $\mathbb{R}P^2$ keine zweidimensionalen Räume konstant positiver Krümmung. Allgemeiner gilt dies sogar für alle geraden Dimensionen (**Satz von Synge**).

Auf $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$ gibt es hingegen interessante Untergruppen: Sei $T[\mu, \nu] : (z_1, z_2) \mapsto (\mu z_1, \nu z_2)$ für $\mu, \nu \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$.

(i) Zeigen Sie, daß $T[\mu, \nu]$ stets ein Diffeomorphismus von $\mathbb{S}^3$ ist.

(ii) Mit der komplexen Multiplikation ist $\mathbb{S}^1$ eine Gruppe. Zeigen Sie, daß $T : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathrm{Diffeom}(\mathbb{S}^3)$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

(iii) Für alle $\ell, m \in \mathbb{N}$ ist $S_m^\ell := \{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k\ell/m} \mid k \in \mathbb{N}\}$ eine diskrete Untergruppe. Zeigen Sie: Sind m und $1 \leq \ell < m$ teilerfremd, so operiert $G := T[S_m^1 \times S_m^\ell]$ fixpunktfrei und eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{S}^3$.

Die Quotienten ${}^{\mathbb{S}^3}/_{G}$ heißen **Linsenräume**.