Dipl.-Math. St. W. von Deylen
Dipl.-Math. I. Thiesen

Übungsblatt 8

Abgabe: 14. Juni 2012

Aufgabe 8.1. Seien $(\tilde{M}, \tilde{g})$ und (M, g) zwei zusammenhängende, geodätisch vollständige Mannigfaltigkeiten, $\pi : \tilde{M} \to M$ eine lokale Isometrie (das heißt: für jedes $p \in \tilde{M}$ gibt es eine Umgebung $U \subset \tilde{M}$, so daß $\pi|_U$ eine Isometrie ist).

(i) Zeigen Sie, daß π die **Hochhebungs-Eigenschaft** für Geodätische besitzt: Für jede Geodätische γ in M gibt es eine Geodätische $\tilde{\gamma}$ in $\tilde{M}$ mit $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. Zeigen Sie, daß π surjektiv ist.

(ii) Sei $p \in M$, $\{\tilde{p}_i\} = \pi^{-1}(p)$ und ε so klein, daß die geodätischen Abstandsbälle $\mathbb{B}_\varepsilon(p_i)$ konvex sind und π eine Isometrie auf ihnen ist. Zeigen Sie: Alle $\mathbb{B}_\varepsilon(p_i)$ sind disjunkt. Schließen Sie, daß π eine Überlagerung ist.

Aufgabe 8.2. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und G eine Untergruppe der Diffeomorphismen $M \to M$, die **fixpunktfrei** und **eigentlich diskontinuierlich** auf M operiert, das heißt:

(a) $f(p) \neq p$ für alle $f \in G \setminus \{\mathrm{id}\}$.

(b) Ist $A \subset M$ kompakt, so gibt es nur endlich viele $f \in G$ mit $A \cap f(A) \neq \varnothing$.

[War falsch, nämlich: »Sind $A, B \subset M$ kompakt, so schneiden sich B und der Orbit von A nur in endlich vielen Punkten.«**]**

Zeigen Sie, daß jeder Punkt $p \in M$ eine Umgebung U besitzt, so daß $f(U) \cap U = \varnothing$ für alle $f \in G \setminus \{\mathrm{id}\}$ ist. Benutzen Sie das, um zu beweisen, daß ${}^{M}\!/\!_{G}$ eine Mannigfaltigkeit und die Projektion $M \to {}^{M}\!/\!_{G}$ eine Überlagerung ist.

Aufgabe 8.3a. Sei $\{p, q\}$ Schläfli-Symbol einer Pflasterung mit $\frac{\pi}{p} + \frac{\pi}{q} \neq \frac{\pi}{2}$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Fundamentalbereiches.

Aufgabe 8.3b. Geben Sie alle möglichen Pflasterungen der $\mathbb{S}^2$ geometrisch und in Schläfli-Symbolen an.

Aufgabe 8.4. Sei S Triangulierung einer Sphäre (beispielsweise ein platonischer Körper). Erstellen Sie mit einer Geometrie-Software Ihrer Wahl Plots von $f(S)$ für drei verschiedene differenzierbare Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(p) = f(-p)$ und $Df(p)$ invertierbar für alle $p \in S$. Möglich sind beispielsweise $f(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ **[war fälschlicherweise** $f(x, y, z) = (yz, xz, yz)$**]**, die **Römische Fläche** von Steiner, oder $f(x, y, z) = (xz, yz, \frac{1}{2}(z^2 - x^2))$, die **Kreuzhaube**.

Tip. In JavaView können Sie f interaktiv eingeben. Sie können aber auch selbst programmieren. Dafür eignet sich das sehr einfache PLY-Dateiformat für polygonale Flächen. Im Internet finden Sie fertige Triangulierung der platonischen Körper in diesem Dateiformat. PLY-Dateien können beispielsweise mit ParaView dargestellt werden.