# Übungsblatt 7

*Abgabe: 7. Juni 2012*

**Definition.** Wir betrachten zwei einfach zusammenhängende $n$-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit konstanter Schnittkrümmung $-1$: Das **Lorentz-Modell** $(L, g_L)$ und das **Poincaré-Kugelmodell** $(D, g_D)$ mit

$$L = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_0^2 = -1\}, \quad g_L = \mathrm{d}x_1^2 + \cdots + \mathrm{d}x_n^2 - \mathrm{d}x_0^2$$
$$D = \{y \in \mathbb{R}^n \quad \mid y_1^2 + \cdots + y_n^2 < 1\}, \quad g_D = \tfrac{4}{(1-y_1^2-\ldots-y_n^2)^2}\big(\mathrm{d}y_1^2 + \cdots + \mathrm{d}y_n^2\big).$$

Verwenden Sie ohne Beweis, daß $y_i = \frac{x_i}{1+x_0}$ eine Isometrie $(L, g_L) \to (D, g_D)$ ist.

**Aufgabe 7.1.** Zeigen Sie: Für das Lorentz-Modell und $\gamma(t) = (\cosh t, \sinh t, 0, \ldots, 0)$ ist die **Translation** entlang $\gamma$

$$T_t(x) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & & & \\ \sinh t & \cosh t & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} x$$

eine Isometrie $(L, g_L) \to (L, g_L)$ mit $\gamma(s) \mapsto \gamma(s + t)$.

Sei $\delta$ eine Geodätische, die $\gamma$ in $\gamma(0)$ senkrecht schneidet. Berechnen Sie und skizzieren Sie den Orbit $\tau_s(t) = T_t(\delta(s))$ von $\delta(s)$ unter $T_t$ im Poincaré-Kugelmodell.

Zeigen Sie, daß die (skalare) Krümmung $|\ddot{\tau}_s|_{g_D}$ von $\tau_s$ konstant in $t$ ist.

Weil die hyperbolische Metrik im Kreisscheibenmodell konform zur euklidischen Metrik ist, können wir vom Winkel sprechen, unter dem sich $\tau_s$ und $\gamma$ im Unendlichen treffen. Wie hängt er von $s$ ab?

**Aufgabe 7.2.** Eine **Horosphäre** im Poincaré-Kugelmodell ist eine (euklidische) Sphäre, die innerhalb von $D$ liegt und $\partial D$ in einem Punkt berührt, beispielsweise das Bild $S$ von $f(u, v) := \frac{1}{2}(\cos u \sin v, 1 - \cos v, -\sin u \sin v)$. Skizzieren Sie das Kugelmodell mit $S$ darin.

Berechnen Sie $g_{ij} = g_D(\partial_i f, \partial_j f)$, dessen Ableitungen und daraus die Christoffel-Symbole aus Aufgabe 2.4. Zeigen Sie damit $\partial_u\Gamma_{12}^2 - \partial_v\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 = 0$. Schließen Sie daraus, daß $S$ flach ist.

**Aufgabe 7.3.** Sei $(M, g)$ eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit und $\bar{M} \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 1 mit Normalenfeld $N$. Verwenden Sie (hier ohne Beweis), daß $\bar{\nabla}_V W = \nabla_V W + b(V, W)N$ mit $b(V, W) = \langle \nabla_V N, W\rangle = -\langle \nabla_V W, N\rangle$. Zeigen Sie $\langle \bar{R}(V, W)X, Y\rangle = \langle R(V, W)X, Y\rangle + b(V, Y)b(W, X) - b(V, X)b(W, Y)$. Schließen Sie für $\Pi_p \subset T_p\bar{M} \subset T_pM$

$$\bar{K}(\Pi_p) = K(\Pi_p) + \det b|_{\Pi_p},$$

das heißt: Intrinsisch war die Horosphäre aus der letzten Aufgabe zwar flach, aber »aus Sicht des umgebenden hyperbolischen Raums« war sie positiv gekrümmt.