# Übungsblatt 6

*Abgabe: 31. Mai 2012*

**Aufgabe 6.1.** Betrachten Sie die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{R}^2$, in Polarkoordinaten $\{(r,\varphi) \in [0;\infty[\times[0;2\pi[\}$, aber jetzt anstatt mit der euklidischen Metrik $g_{\text{eukl.}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{smallmatrix}\right)$ versehen mit der **Poincaré-Kreisscheiben-Metrik** **[war $g = \frac{1}{1-r^2} g_{\text{eukl.}}$]**

$$g = \frac{4}{(1-r^2)^2} g_{\text{eukl.}} = \frac{4}{(1-r^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

*(i)* Skizzieren Sie $\partial_r$ sowie $\partial_\varphi$, und berechnen Sie $|\partial_r|$ und $|\partial_\varphi|$.

*(ii)* Berechnen Sie $\nabla_{\partial_r}\partial_r$, $\nabla_{\partial_r}\partial_\varphi$, $\nabla_{\partial_\varphi}\partial_r$, $\nabla_{\partial_\varphi}\partial_\varphi$ und $\nabla_V W$ für $V = r\partial_r + r^2\partial_\varphi$ und $W = \varphi\partial_r + r\varphi\partial_\varphi$. Zwei davon sind gleich – warum?

**Aufgabe 6.2.** Wir betrachten die obere Halbebene $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times ]0;\infty[\}$ mit der **Poincaré-Halbebenenmetrik** $g = \frac{1}{y^2} g_{\text{eukl.}} = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$. Sei $\gamma$ eine zur Bogenlänge proportionale Parametrisierung von $\{(x_0, y) \mid y \in ]0;\infty[\}$ für festes $x_0$.

*(i)* Skizzieren Sie die Situation und zeigen Sie, daß $\gamma$ eine Geodätische ist.

*(ii)* Zeigen Sie, daß $J = \partial_x$ ein Jacobi-Feld entlang $\gamma$ ist.

Interessant ist hier, daß $|J| \to \infty$ für $y \to 0$. Das bedeutet, daß die Geodätischen für verschiedene $x_0$, obwohl sie in »konstantem Abstand« zu verlaufen scheinen, für $y \to 0$ auseinander- und für $y \to \infty$ zusammenlaufen.

**Aufgabe 6.3.** Sei $(M,g)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einer Geodätischen $\gamma : I \to M$. Ein Jacobi-Feld $J$ entlang $\gamma$ mit $J \perp \dot\gamma$ überall heißt ein **normales** Jacobi-Feld entlang $\gamma$. Zeigen Sie, daß $\ddot J + CJ = 0$ für jedes normale Jacobi-Feld, wenn $(M,g)$ konstante Schnittkrümmung $C \in \mathbb{R}$ besitzt.

**Aufgabe 6.4.** Sei $r > 0$. Zeigen Sie (kurz), daß die gewöhnlichen Differentialgleichungen $\ddot u + r^2 u = 0$ und $\ddot v - r^2 v$ mit Anfangswerten $u(0) = v(0) = 0$ sowie $\dot u(0) = \dot v(0) = r$ die Lösungen

$$u(t) = \sin rt \qquad \text{und} \qquad v(t) = \sinh rt$$

besitzen. Sei nun $J$ ein normales Jacobi-Feld mit $J(0) = 0$. Zeigen Sie $|J(t)|_g = \lambda u(t)$ für $C = r^2 > 0$ bzw. $|J(t)|_g = \lambda v(t)$ für $C = -r^2 < 0$. Was ist $\lambda$?

Aus diesem Grunde sagt man, daß kleinere Schnittkrümmung die Geodätischen »schneller divergieren« läßt.

Schließen Sie, daß zwei Geodätische auf $\mathbb{S}^n$ sich in Antipodenpunkten schneiden und zwei Geodätische auf $\mathbb{H}^n$ sich höchstens einmal schneiden.

# Exercise Sheet 6

*due May 31st, 2012*

**Exercise 6.1.** Consider the open unit disk in $\mathbb{R}^2$, given in polar coordiates $\{(r,\varphi) \in [0;\infty[\times[0;2\pi[\}$, but instead of the usual Euclidean metric $g_{\text{eucl.}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{smallmatrix}\right)$, we consider the **Poincaré disk model** for $\mathbb{H}^2$, that is

$$g = \frac{g_{\text{eucl.}}}{1-r^2} = \frac{1}{1-r^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

*(i)* Sketch $\partial_r$ and $\partial_\varphi$ and compute $|\partial_r|$ and $|\partial_\varphi|$.

*(ii)* Compute $\nabla_{\partial_r}\partial_r$, $\nabla_{\partial_r}\partial_\varphi$, $\nabla_{\partial_\varphi}\partial_r$, $\nabla_{\partial_\varphi}\partial_\varphi$ and $\nabla_V W$ for $V = r\partial_r + r^2\partial_\varphi$ and $W = \varphi\partial_r + r\varphi\partial_\varphi$. Two of these derivatives coincide. Why?

**Exercise 6.2.** Consider the upper half plane $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times ]0;\infty[\}$ with the metric of the **Poincaré half-plane model** for $\mathbb{H}^2$, namely $g = \frac{1}{y^2} g_{\text{eucl.}} = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$. Let $\gamma$ be a constant-speed parametrisation of $\{(x_0, y) \mid y \in ]0;\infty[\}$ for constant $x_0$.

*(i)* Sketch the situation and show that $\gamma$ is a geodesic.

*(ii)* Show that $J = \partial_x$ is a Jacobi field along $\gamma$.

Note that $|J|_g \to \infty$ for $y \to 0$. That means that two such geodesic for different values of $x_0$, although they seem to run in "constant distance", spread out as $y$ approaches 0 and tend to each other for large $y$.

**Exercise 6.3.** Let $(M,g)$ be a Riemannian manifold with a geodesic $\gamma : I \to M$. A Jacobi field $J$ along $\gamma$ with $J \perp \dot\gamma$ everywhere is called a **normal** Jacobi field along $\gamma$. Show that $\ddot J + CJ = 0$ for any normal Jacobi field if $(M,g)$ has constant sectional curvature $C \in \mathbb{R}$.

**Exercise 6.4.** Suppose $r > 0$. Show (quickly) that the ordinary differential equations $\ddot u + r^2 u = 0$ and $\ddot v - r^2 v$ with initial values $u(0) = v(0) = 0$ and $\dot u(0) = \dot v(0) = r$ have solutions

$$u(t) = \sin rt \qquad \text{and} \qquad v(t) = \sinh rt.$$

Now let $J$ be a normal Jacobi field with $J(0) = 0$. Show $|J(t)|_g = \lambda u(t)$ in case $C = r^2 > 0$ or $|J(t)|_g = \lambda v(t)$ in case $C = -r^2 < 0$. What is $\lambda$?

This is the reason to say that "lower sectional curvature causes geodesics to diverge faster".

Conclude that two geodesics on $\mathbb{S}^n$ intersect each other in antipodal points and two geodesics on $\mathbb{H}^n$ meet at most once.