Übungsblatt 5

Abgabe: 24. Mai 2012

Aufgabe 5.1. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Cività-Zusammenhang ∇. Sei R der $\binom{3}{1}$-Krümmungstensor

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

(i) Zeigen Sie, daß R tatsächlich tensoriell in Z ist, d. h. $R(X, Y)(fZ) = f\, R(X, Y)Z$ für eine C^∞-Funktion f.

(ii) Berechnen Sie die Koeffizienten ${R_{ijk}}^\ell$ von R in der Koordinatendarstellung $R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_\ell {R_{ijk}}^\ell\, \partial_\ell$.

Aufgabe 5.2a. Zeigen Sie $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ (**erste Bianchi-Identität**).

Aufgabe 5.2b. Benutzen Sie ohne Beweis die Symmetrien von R:

(i) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$,

(ii) $\langle R(X, Y)Z, V\rangle = -\langle R(X, Y)V, Z\rangle$ und

(iii) $\langle R(X, Y)Z, V\rangle = \langle R(Z, V)X, Y\rangle$,

Sei $\Pi_p \subset T_pM$ linear Unterraum mit Basis X, Y. Zeigen Sie, daß die **Schnittkrümmung** $K(\Pi_p) := \frac{\langle R(X,Y)Y,X\rangle}{|X|^2\,|Y|^2-\langle X,Y\rangle^2}$ nicht von X und Y abhängt, sondern allein von Π_p bestimmt wird.

Zeigen Sie, daß $K(T_pM)$ für zweidimensionales M der Gauß-Krümmung bei p entspricht.

Tip. Aufgabe 29 aus dem letzten Semester.

Aufgabe 5.3. Zeigen Sie für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K(\Pi_p) = C$ überall, daß $R(X, Y)Z = C\big(\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y\big)$.

Tip. Sie brauchen nur die Multilinearität und die Symmetrien von R.

Aufgabe 5.4a. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Normalkoordinaten (U, x^i) um $p \in M$. Zeigen Sie für $W = \sum W^i \partial_i \in T_pM$, daß das Jacobi-Feld entlang der radialen Geodätischen γ (d. h. $\gamma(0) = p$) mit $J(0) = 0$ und $\dot J(0) = W$ durch $J(t) = t \sum W^i \partial_i$ für alle t gegeben ist.

Aufgabe 5.4b. [Aufgabe 6.4 ist fast identisch, nur ausführlicher.] Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung C, und sei E ein paralleles Vektorfeld entlang γ. Zeigen Sie, daß $J = uE$ ein Jacobi-Feld entlang γ ist, wobei u eine Lösung von $\ddot u + Cu = 0$ sei. Geben Sie diese Lösung für $u(0) = 0$ an.

Exercise Sheet 5

due May 24th, 2012

Exercise 5.1. Let (M, g) be a Riemannian manifold with Levi Cività connection ∇. Let R be the $\binom{3}{1}$ curvature tensor

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

(i) Show that R is indeed tensorial in Z, i. e. $R(X, Y)(fZ) = f\,R(X, Y)Z$ for a C^∞ function f.

(ii) Compute the coordinates $R_{ijk}{}^{\ell}$ of R in the coordinate expression $R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_\ell R_{ijk}{}^{\ell}\,\partial_\ell$.

Exercise 5.2a. Show $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ (**first Bianchi identity**).

Exercise 5.2b. Take the following symmetries of R for proven:

(i) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$,

(ii) $\langle R(X, Y)Z, V\rangle = -\langle R(X, Y)V, Z\rangle$, and

(iii) $\langle R(X, Y)Z, V\rangle = \langle R(Z, V)X, Y\rangle$,

For a two-dimensional subspace $\Pi_p \subset T_pM$ with basis X, Y, show now that its **sectional curvature** $K(\Pi_p) := \frac{\langle R(X,Y)Y,X\rangle}{|X|^2\,|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2}$ does not depend on the chosen basis X and Y, but is indeed determined by Π_p only.

If M is only two-dimensional, show that $K(T_pM)$ equals the Gauß curvature at p.

Hint. Exercise 29 from the previous semester.

Exercise 5.3. For a Riemannian manifold with constant sectional curvature $K(\Pi_p) = C$ everywhere, show that $R(X, Y)Z = C\big(\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y\big)$.

Hint. Nothing more than multilinearity and the symmetries of R is needed.

Exercise 5.4a. Let (M, g) be a Riemannian manifold with normal coordinates (U, x^i) around $p \in M$. For $W = \sum W^i \partial_i \in T_pM$, show that the Jacobi field along a radial geodesic γ (i. e. $\gamma(0) = p$) with $J(0) = 0$ and $\dot J(0) = W$ is given by $J(t) = t \sum W^i \partial_i$ for all t.

Exercise 5.4b. Let (M, g) be a Riemannian manifold of constant sectional curvature C, and let E be a parallel vector field along γ. Show that $J = uE$ is a Jacobi field along γ, where u is a solution of $\ddot u + Cu = 0$. Give these solutions u for $u(0) = 0$.