Übungsblatt 4

Abgabe: 10. Mai 2012

Aufgabe 4.1. Auf dem letzen Übungsblatt haben wir Normalkoordinaten als eine besonders gut an einen einzelnen Punkt angepaßte Parametrisierung kennengelernt. Will man das Koordinatensystem an einer ganzen Kurve ausrichten, benutzt man (geodätische) **Parallelkoordinaten** (die auf Flächen bereits im letzten Semester diskutiert wurden).

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\gamma : \,]-\varepsilon; \varepsilon[\, \to M$ eine glatte reguläre Kurve. Zeigen Sie, daß es eine Umgebung U vpn γ und Koordinaten $x^i : U \to \mathbb{R}$ gibt, so daß $g_{ij} = \delta_{ij}$ gilt. Für eine Geodätische γ zeigen Sie $\partial_k g_{ij} = 0$ und $\Gamma^k_{ij} = 0$ auf γ für alle i, j, k. **[Die Einschränkung auf Geodätische fehlte.]**

Aufgabe 4.2. Der Paralleltransport wurde über die kovariante Ableitung definiert. Andererseits ergibt der Paralleltransport auch eine Möglichkeit, Vektoren mit verschiedenen Fußpunkten zu vergleichen, worüber die kovariante Ableitung ebenfalls definiert werden kann – daher der Name »Zusammenhang«.

Sei V eine Vektorfeld auf (M, g) und $\gamma : \,]-\varepsilon; \varepsilon\,[\, \to M$ eine glatte reguläre Kurve. Jedes $V|_{\gamma(s)}$ induziert ein eindeutiges Vektorfeld $V^s(t)$ entlang γ mit $V^s(s) = V|_{\gamma(s)}$ und $\nabla_{\dot\gamma(t)} V^s(t) = 0$ für alle t (mit anderen Worten: V^s ist **parallel** entlang γ). Zeigen Sie nun

$$\nabla_{\dot\gamma(0)} V = \lim_{s \to 0} \frac{V^s(0) - V|_{\gamma(0)}}{s}.$$

Aufgabe 4.3. Wir nennen eine Riemannsche Mannigfaltigkeit **geodätisch vollständig**, wenn sie (a) vollständig im üblichen metrischen Sinne ist, (b) je zwei Punkte mit einer Geodätischen verbunden werden können. (Im Satz von Hopf-Rinow werden Sie sehen, daß die beiden Bedingungen äquivalent sind.)

Seien (M, g) und $(N, \tilde g)$ geodätisch vollständig und $f : M \to N$ eine **Isometrie**, d. h. $\tilde g(Df\, X, Df\, Y) = g(X, Y)$ für alle $X, Y \in T_pM$.

Zeigen Sie, daß f durch $f(p)$ und $Df|_p$ für einen beliebigen Punkt $p \in M$ vollständig bestimmt ist:

(i) Zeigen Sie, daß f Geodätische auf Geodätische und geodätische Bälle auf ebensolche abbildet.

(ii) Zeigen Sie, daß in einem kleinen Ball um jedes $q \in M$ gilt:
$f(x) = \exp^N_{f(q)} \circ Df|_q \circ (\exp^M_q)^{-1}(x)$.

(iii) Wählen Sie $x \in M$, betrachten Sie eine Geodätische $p \rightsquigarrow x$ und zeigen Sie damit die Behauptung.

Aufgabe 4.4. Geben Sie alle Isometrien $M \to M$ für $M = \mathbb{R}^k, \mathbb{S}^k$ und $\mathbb{H}^k$ an.

Exercise Sheet 4

due May 10th, 2012

Exercise 4.1. On the previous exercise sheet, we introduced normal coordinates as a parametrisation that is especially well adapted to one single point on a manifold. When considering a whole curve, one tends to use (geodesic) **parallel coordinates** (which were already discussed on surfaces in Differential Geometry I).

Let (M, g) be a Riemannian manifold and $\gamma :]-\varepsilon; \varepsilon[\to M$ be a smooth regular curve. Show that there is a small neighbourhood U of γ and coordinates $x^i : U \to \mathbb{R}$ such that $g_{ij} = \delta_{ij}$, $\partial_k g_{ij} = 0$ and $\Gamma_{ij}^k = 0$ on γ for all i, j, k.

Hint. Consider parallel transport of an orthonormal basis of $T_{\gamma(0)}M$ and geodesic rays emanating from points on γ.

Exercise 4.2. You have defined parallel transport by using the covariant derivative. The other way round, parallel transport gives a way to compare vectors with different base points, and the derivative of these transported vectors (now with according base points) gives back the covariant derivative. This method may also be taken to justify the term "connection".

Let V be a vector field on (M, g) and $\gamma :]-\varepsilon; \varepsilon[\to M$ a smooth regular curve. Recall that any $V|_{\gamma(s)}$ induces a unique vector field $V^s(t)$ along γ with $V^s(s) = V|_{\gamma(s)}$ and $\nabla_{\dot\gamma(t)} V^s(t) = 0$ for all t (in other words, V^s is **parallel** along γ). Now show

$$\nabla_{\dot\gamma(0)} V = \lim_{h \to 0} \frac{V^h(0) - V|_{\gamma(0)}}{h}.$$

Exercise 4.3. Let us call a Riemannian manifold **geodesically complete** if (a) it is complete in the usual metric sense, (b) any two points can be joined with a geodesic. (Soon, the Hopf–Rinow theorem will show that in fact these conditions are equivalent.)

Suppose (M, g) and $(N, \tilde g)$ are geodesically complete Riemannian manifolds and $f : M \to N$ is an **isometry**, i. e. $\tilde g(Df\,X, Df\,Y) = g(X, Y)$ for all $X, Y \in T_pM$.

Show that f is completely determined by $f(p)$ and $Df|_p$ for any $p \in M$. Proceed as follows:

(i) Show that f maps geodesics to geodesics and hence geodesic balls to geodesic balls.

(ii) Show that for every $q \in M$, it holds $f(x) = \exp^N_{f(q)} \circ Df|_q \circ (\exp^M_q)^{-1}(x)$ inside a small ball around q.

(iii) Take any point $x \in M$, consider a geodesic $p \rightsquigarrow q$ and argue by completeness that $f(x)$ is determined, once you know $f(p)$ and $Df|_p$.

Exercise 4.4. Give all isometries $M \to M$ for the cases $M = \mathbb{R}^k, \mathbb{S}^k$ and $\mathbb{H}^k$.