Übungsblatt 3

Abgabe: 8. Mai 2012

Aufgabe 3.1. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $E_1, \ldots, E_n$ eine Orthonormalbasis von T_pM. Sie induziert einen Isomorphismus $E : \mathbb{R}^n \to T_pM$, $(x^1, \ldots, x^n) \mapsto \sum_i x^i E_i$. In einer Umgebung U von p in M, in der $\exp_p$ bijektiv ist, heißen $x := E^{-1} \circ \exp_p^{-1} : U \to \mathbb{R}^n$ **Normalkoordinaten** für M bei p.

Offensichtlich hat p die Koordinaten $(0, \ldots, 0)$, und es ist $g_{ij} = \delta_{ij}$ bei p (aber nicht unbedingt anderswo!). Zeigen Sie:

(i) Für jedes $V = \sum V^i \partial_i \in T_pM$ hat die Geodätische γ, die bei p mit Anfangsgeschwindigkeit V startet, die Koordinaten $x(\gamma(t)) = (tV^1, \ldots, tV^n)$.

(ii) Die ersten partiellen Ableitungen von g_{ij} und die Christoffel-Symbole (vgl. Aufgabe 2.4) verschwinden bei p.

Aufgabe 3.2. Man sagt kurz »$D\exp = \mathrm{id}$ bei 0«. Formulieren Sie diese Behauptung exakt (in welchem Sinne sind Urbild und Bild überhaupt gleich?) und beweisen Sie sie.

Hat jeder Punkt auf einer beliebigen Mannigfaltigkeit eine **konvexe** Umgebung, das heißt $U \subset M$, so daß für $p, q \in U$ eine eindeutige Geodätische $p \rightsquigarrow q$ in U verläuft?

Aufgabe 3.3. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Normalkoordinaten (U, x^i) um p. Definiere die **radiale Abstandsfunktion** $r : U \to \mathbb{R}$ als $r(q) = \big(\sum (x^i(q))^2\big)^{1/2}$ und das **radiale Einheitsvektorfeld** $\partial_r|_q := \sum \frac{x^i(q)}{r(q)} \partial_i|_q$. Zeigen Sie:

(i) An jedem Punkt $q \in U$, $q \neq p$, ist ∂_r die Tangente der nach Bogenlänge parametrisierten Geodätischen $p \rightsquigarrow q$, daher $|\partial_r|_g = 1$.

(ii) $\operatorname{grad} r = \partial_r$, das bedeutet $Xr = \langle X, \partial_r \rangle$ für alle $X \in T_qM$ mit $q \in U$, $q \neq p$, in einer kleinen Umgebung U von p. (Tip: Benutzen Sie das Gauß-Lemma in der Form »Das radiale Vektorfeld ∂_r um p ist orthogonal zu den geodätischen Sphären um p«.)

Aufgabe 3.4. Bis jetzt wissen Sie aus der Vorlesung nur, daß längenminimierende Kurven die Geodätischen-Gleichung erfüllen. Aber Sie haben noch nicht gezeigt, daß Geodätische tatsächlich immer die (lokal) kürzeste Kurven sind.

Zeigen Sie $d_g(p, q) = r(q)$ in einer normalen Umgebung U von p, darin $d_g(p, q)$ die Länge der kurzesten Kurve $p \rightsquigarrow q$ wie in Aufgabe 1.3. Das impliziert auch, daß Normalkoordinaten geodätische Sphären in M auf euklidische Sphären in $\mathbb{R}^n$ abbilden.

Tip. Sei γ eine beliebige Kurve $p \rightsquigarrow q$ in U mit Tangente $T := \dot\gamma$. Zerlegen Sie $T = \alpha\partial_r + X$ für eine skalare Funktion α und ein Vektorfeld $X \perp \partial_r$. Dann schätzen Sie die Lange von γ von oben ab, indem Sie nur den ∂_r-Anteil von T betrachten.

Dipl.-Math. St. W. von Deylen
Dipl.-Math. I. Thiesen

Exercise Sheet 3

due May 8th, 2012

Exercise 3.1. Let (M, g) be a Riemannian manifold, $p \in M$ and $E_1, \ldots, E_n$ an orthonormal basis of T_pM. This basis induces an isomorphism $E : \mathbb{R}^n \to T_pM$, $(x^1, \ldots, x^n) \mapsto \sum_i x^i E_i$. For a small neighbourhood U of p in M on which $\exp_p$ is bijective, $x := E^{-1} \circ \exp_p^{-1} : U \to \mathbb{R}^n$ is called a **normal coordinate system** for M at p.

Obviously, the coordinates of p are $(0, \ldots, 0)$, and $g_{ij} = \delta_{ij}$ at p (but not neccessarily anywhere else!). Show the following additional properties of normal coordinates:

(i) For any $V = \sum V^i \partial_i \in T_pM$, the geodesic γ starting at p with initial velocity V is given by $x(\gamma(t)) = (tV^1, \ldots, tV^n)$.

(ii) The first partial derivatives of g_{ij} and the Christoffel symbols (cf. exercise 2.4) vanish at p.

Exercise 3.2. Colloquially, one says that "$D\exp = \mathrm{id}$ at the origin". Give a precise meaning to this proposition (in which sense do domain and image coincide such that one can speak of the identity at all?) and prove it.

Does every point on an arbitrary manifold have a **convex neighbourhood**, that is $U \subset M$ such that for every $p, q \in U$ there is a unique geodesic in U connecting them?

Exercise 3.3. Let (M, g) be a Riemannian manifold and (U, x^i) be normal coordinates at p. Define the **radial distance function** $r : U \to \mathbb{R}$ by $r(q) = \left(\sum (x^i(q))^2\right)^{1/2}$ and the **unit radial vector field** $\partial_r|_q := \sum \frac{x^i(q)}{r(q)} \partial_i|_q$. Show:

(i) at any point $q \in U$, $q \neq p$, the vector field ∂_r is the velocity of the unit speed geodesic from p to q, thus $|\partial_r|_g = 1$.

(ii) $\operatorname{grad} r = \partial_r$, that means $Xr = \langle X, \partial_r \rangle$ for all $X \in T_qM$ with $q \in U$, $q \neq p$ within a small neighbourhood U of p. (Hint: use the Gauß lemma in the form "The radial vector field ∂_r centered at p is orthogonal to the geodesic spheres around p".)

Exercise 3.4. Until now, you have seen in the lecture that length-minimizing curves fulfill the geodesic equation. But you have not yet shown that geodesics are always (locally) shortest paths.

Show $d_g(p, q) = r(q)$ in a normal neighbourhood U of p with d_g defined as length of the shortest path $p \rightsquigarrow q$ as in exercise 1.3. This also means that normal coordinates map geodesic spheres in M to Euclidean spheres in $\mathbb{R}^n$.

Hint. Let γ be an arbitrary curve $p \rightsquigarrow q$ inside U with tangent $T := \dot{\gamma}$. Decompose $T = \alpha \partial_r + X$ with some scalar function α and a vector field $X \perp \partial_r$. Then estimate the length of γ from above by only considering the ∂_r part of T.