Übungsblatt 2

Abgabe: 26. April 2012

Aufgabe 2.1. Seien X, Y Derivationen bei $a \in \mathbb{R}^k$ wie in Aufgabe 1.1. Zeigen Sie, daß ihre **Lie-Klammer** $[X, Y]$, definiert als $[X, Y]f := XYf - YXf$, eine Derivation bei a ist.

Aufgabe 2.2. Wie in Aufgabe 1.2, kann man auch die Lie-Klammer zwei Vektorfelder auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit definieren. Offensichtlich ist sie $\mathbb{R}$-linear und antisymmetrisch. Zeigen Sie:

(i) die **Jacobi-Identität** $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$,

(ii) $[fX, gY] = fg[X, Y] + (f\,Xg)Y - (g\,Yf)X$ für $f, g \in C^\infty(M)$,

(iii) $[\partial_i, \partial_j] = 0$ für Koordinaten-Vektorfelder ∂_i, ∂_j.

Definition. Sei $(M, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung $\nabla : \mathfrak{X}TM \times \mathfrak{X}TM \to \mathfrak{X}TM$ heißt ein **(linearer) Zusammenhang**, wenn $\nabla_X Y$ tensoriell in X und eine Derivation in Y ist, das heißt

$$\begin{aligned} \nabla_{fX+gZ}Y &= f\nabla_X Y + g\nabla_Z Y, \\ \nabla_X(Y + Z) &= \nabla_X Y + \nabla_X Z, \\ \nabla_X(fY) &= f\nabla_X Y + (Xf)Y \qquad (\textbf{Leibniz-Regel}) \end{aligned}$$

punktweise für alle Vektorfelder $X, Y, Z \in \mathfrak{X}TM$ und $f, g \in C^\infty(M)$ (vgl. Aufgabe 35 aus dem letzten Semester.)

∇ heißt **kompatibel mit** $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$, wenn $X\langle Y, Z\rangle = \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$ ist, und **symmetrisch** oder **torsionsfrei**, falls $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ gilt.

Aufgabe 2.3. Zeigen Sie die **Koszul-Formel**

$$2\langle\nabla_X Y, Z\rangle = X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle Y, [X, Z]\rangle - \langle Z, [Y, X]\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle$$

für einen symmetrischen und zu $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ kompatiblen Zusammenhang. Schließen Sie, daß solch ein Zusammenhang, so er existiert, eindeutig durch $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ bestimmt ist. Er heißt der **Levi-Cività-Zusammenhang** zu $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$.

Tip. Beginnen Sie mit $X\langle Y, Z\rangle$, $Y\langle Z, X\rangle$, $Z\langle X, Y\rangle$, wenden Sie erst $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$-Kompatiblität, dann Symmetrie an, zum Schluß summieren Sie rechte und linke Seite auf.

Aufgabe 2.4. Seien Γ_{ij}^k definiert durch $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$ mit dem Levi-Cività-Zusammenhang ∇ zu $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ und $g_{ij} := \langle\partial_i, \partial_j\rangle$. Zeigen Sie

$$2\langle\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_k\rangle = \partial_i\langle\partial_j, \partial_k\rangle + \partial_j\langle\partial_k, \partial_i\rangle - \partial_k\langle\partial_i, \partial_j\rangle$$

und also $2\sum_k \Gamma_{ij}^k g_{kl} = \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}$. Schlußfolgern Sie, daß auf jeder Riemannschen Mannigfaltigkeit ein Levi-Cività-Zusammenhang existiert.

Exercise Sheet 2

due April 26th, 2012

Exercise 2.1. Let X, Y be two derivations at $a \in \mathbb{R}^k$ as in exercise 1.1. Show that their **Lie bracket** $[X, Y]$, defined by $[X, Y]f := XYf - YXf$, is again a derivation at a.

Exercise 2.2. Like in exercise 1.2, one can define the Lie bracket of two vector fields on a Riemannian manifold. Obviously, the Lie bracket is $\mathbb{R}$-bilinear and antisymmetric. Show

(i) the **Jacobi identity** $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$,

(ii) $[fX, gY] = fg[X, Y] + (f\,Xg)Y - (g\,Yf)X$ for $f, g \in C^\infty(M)$,

(iii) $[\partial_i, \partial_j] = 0$ for coordinate vector fields ∂_i, ∂_j.

Let $(M, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ be a Riemannian manifold. A map $\nabla : \mathfrak{X}TM \times \mathfrak{X}TM \to \mathfrak{X}TM$ is called a **(linear) connection** if $\nabla_X Y$ is tensorial in X and a derivation in Y, that means

$$\begin{aligned}\nabla_{fX+gZ}Y &= f\nabla_X Y + g\nabla_Z Y,\\ \nabla_X(Y + Z) &= \nabla_X Y + \nabla_X Z,\\ \nabla_X(fY) &= f\nabla_X Y + (Xf)Y \qquad \textbf{(Leibniz' rule)}\end{aligned}$$

pointwise for all vector fields $X, Y, Z \in \mathfrak{X}TM$ and $f, g \in C^\infty(M)$ (cf. ex. 35 from the previous semester.)

∇ is said to be **compatible with** $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ if $X\langle Y, Z\rangle = \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$ and **symmetric** or **torsion-free** if $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.

Exercise 2.3. Show the **Koszul formula**

$$2\langle\nabla_X Y, Z\rangle = X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle Y, [X, Z]\rangle - \langle Z, [Y, X]\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle$$

for a symmetric and $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$-compatible connection. Deduce that such a connection, if it exists, is uniquely determined by $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$. It is called the **Levi-Cività connection** for $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$.

Hint. Start with $X\langle Y, Z\rangle$, $Y\langle Z, X\rangle$, $Z\langle X, Y\rangle$, apply $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$-compatibility, then symmetry, finally sum up left- and right-hand sides.

Exercise 2.4. Let Γ_{ij}^k be defined by $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$ with the Levi-Cività connection ∇ for $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ and $g_{ij} := \langle\partial_i, \partial_j\rangle$. Show

$$2\langle\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_k\rangle = \partial_i\langle\partial_j, \partial_k\rangle + \partial_j\langle\partial_k, \partial_i\rangle - \partial_k\langle\partial_i, \partial_j\rangle$$

and hence $2\sum_k \Gamma_{ij}^k g_{kl} = \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}$. Conclude that there exists a Levi-Cività connection on every Riemannian manifold.