Übungsblatt 1

Abgabe: 24. April 2012

Aufgabe 1.1. Sei $a \in \mathbb{R}^k$. Eine **Derivation** bei a ist eine lineare Abbildung $X : C^\infty(\mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}$ mit

$$X(fg) = f(a)\, Xg + g(a)\, Xf \quad \text{für alle } f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^k) \qquad (\textbf{Leibniz-Regel}).$$

(i) Zeigen Sie $Xf = 0$ für konstantes f.

(ii) Zeigen Sie $X(fg) = 0$ für $f(a) = g(a) = 0$.

(iii) Zeigen Sie: Die Menge $T_a(\mathbb{R}^k)$ aller Derivationen bei a ist ein k-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Betrachten Sie dafür die Abbildung, die $v \in \mathbb{R}^k$ auf die Ableitung in Richtung v sendet.

Aufgabe 1.2. Sei nun M eine glatte k-dimensionale Mannigfaltigkeit. $C^\infty(M)$ ist die Menge aller Funktionen $\eta : M \to \mathbb{R}$, für die $\eta \circ f^{-1} : U \to \mathbb{R}$ in jeder Karte $f : U \to M$ glatt ist. Eine lineare Abbildung $X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ heißt **Derivation** bei $p \in M$, wenn $X(fg) = g(p)Xg + f(p)Xg$ für alle f und g ist. Die Menge aller solcher Derivationen sei T_pM. Per definition sind T_pM und T_qM für $p \neq q$ disjunkt. Zeigen Sie, daß $TM := \bigcup_{p \in M} T_pM$ ein glattes Vektorbündel über M vom Rang k ist.

Definition. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Für einen Vektor $V \in T_pM$ sei γ_V die eindeutige Geodätische mit $\gamma_V(0) = p$ und $\dot\gamma_V(0) = V$. Der lokale Existenzsatz für Geodätische besagt, daß es $\varepsilon > 0$ gibt, so daß γ_V auf $]-\varepsilon, \varepsilon[$ für jedes $V \in T_pM$ definiert ist, äquivalent: daß $\gamma_V(1)$ für jedes $V \in T_pM$ mit $|V| < \varepsilon$ definiert ist. Sei $\exp_p : \mathbb{B}_0^{T_pM}(\varepsilon) \to M$, $V \mapsto \gamma_V(1)$ die **Exponentialabbildung** in p.

Aufgabe 1.3. Wir betrachten $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, versehen mit der induzierten Riemannschen Metrik g, und ihren Nordpol $n = (0, 0, 1)$.

(i) Zeigen Sie $d_g(x, y) = \arccos \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^3}$ für alle $x, y \in \mathbb{S}^2$.

(ii) Zeigen Sie

$$\exp_n(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin r \\ \sin\varphi \cos r \\ \cos r \end{pmatrix}$$

für Polarkoordinaten (r, φ) von $T_n\mathbb{S}^2$.

Aufgabe 1.4. Situation wie vor.

(i) Zeigen Sie, daß geodätische Kreise $\{q \in \mathbb{S}^2 \mid d_g(n, q) = r\}$ Radius $2\pi \sin r$ besitzen.

(ii) Zeigen Sie $|\frac{\partial}{\partial\varphi}| = \frac{\sin r}{r}$. **[Das stimmt so nicht – was ist stattdessen richtig?]**

(iii) Zeigen Sie: Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ ist das Vektofeld $V = a\frac{\partial}{\partial r} + b\,\frac{\partial}{\partial\varphi}/|\frac{\partial}{\partial\varphi}|$ parallel entlang jeder radialen Geodätischen.

Exercise Sheet 1

due April 24th, 2012

Exercise 1.1. Let $a \in \mathbb{R}^k$. A **derivation** at a is a linear map $X : C^\infty(\mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}$ that satisfies

$$X(fg) = f(a)\,Xg + g(a)\,Xf \quad \text{for all } f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^k) \qquad (\textbf{Leibniz' rule}).$$

(i) Show $Xf = 0$ whenever f is constant.

(ii) Show $X(fg) = 0$ whenever $f(a) = g(a) = 0$.

(iii) Show that the set $T_a(\mathbb{R}^k)$ of all derivations at a is a k-dimensional real vector space. For this purpose, consider the map sending $v \in \mathbb{R}^k$ to the derivative in direction of v.

Exercise 1.2. Now let M be a smooth k-dimensional manifold. $C^\infty(M)$ is the set of all maps $\eta : M \to \mathbb{R}$ such that $\eta \circ f^{-1} : U \to \mathbb{R}$ is smooth for every chart $f : U \to M$. A linear map $X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ is called a **derivation** at $p \in M$ if $X(fg) = g(p)Xg + f(p)Xg$ for all f and g. The set of all those derivations is called T_pM. Naturally, T_pM and T_qM are disjoint whenever $p \neq q$. Show that $TM := \bigcup_{p\in M} T_pM$ is a smooth vector bundle over M of rank k.

Definition. Let (M, g) be a Riemannian manifold, $p \in M$. For a vector $V \in T_pM$, let γ_V be the unique geodesic with $\gamma_V(0) = p$ and $\dot\gamma_V(0) = V$. The local existence theorem for geodesics show that there is $\varepsilon > 0$ such that γ_V is defined on $]-\varepsilon, \varepsilon[$ for every $V \in T_pM$, equivalently: that $\gamma_V(1)$ is defined for every $V \in T_pM$ with $|V| < \varepsilon$. Define $\exp_p : \mathbb{B}_0^{T_pM}(\varepsilon) \to M$, $V \mapsto \gamma_V(1)$ as the **exponential map** in p.

Exercise 1.3. Consider $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, endowed with the induced Riemannian metric g and its north pole $n = (0, 0, 1)$.

(i) Show $d_g(x, y) = \arccos \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}^3}$ for all $x, y \in \mathbb{S}^2$.

(ii) Show

$$\exp_n(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin r \\ \sin\varphi \cos r \\ \cos r \end{pmatrix}$$

for polar coordinates (r, φ) of $T_n\mathbb{S}^2$.

Exercise 1.4. Situation as above.

(i) Show that geodesic circles $\{q \in \mathbb{S}^2 \mid d_g(n, q) = r\}$ have radius $2\pi \sin r$.

(ii) Show $|\frac{\partial}{\partial\varphi}| = \frac{\sin r}{r}$. Interpret this factor $|\frac{\partial}{\partial\varphi}|$ as distortion of the exponential map and give a geometric view of this factor.

(iii) Show: for arbitrary $a, b \in \mathbb{R}$ is the vector field $V = a\frac{\partial}{\partial r} + b/|\frac{\partial}{\partial\varphi}|\frac{\partial}{\partial\varphi}$ parallel along every radial geodesic.